Lösningsförslag Pythagoras Quest Distriktsfinalen 2016

Lars Åström & Malte Larsson

Del 1.

1. Låt $O$ vara medelpunkten i åttahörningen, dvs. skärningspunkten mellan *AE* och *BF*. Vi noterar nu att triangeln AOB måste vara en åttondedel av hela arean eftersom om vi bildar de åtta trianglarna som innehåller sidorna i åttahörningen och *O*, så har alla dessa trianglar lika stor area ty åttahörningen är regelbunden. Alltså är arean av $\Delta AOB = \frac{1}{8}$. Vi noterar nu att $\Delta ABF$ har samma bas som $\Delta AOB$ fast dubbelt så stor höjd. Det medför att arean av $\Delta ABF = \frac{1}{4}$. Arean av $\Delta AOF =$Arean av $\Delta BEF$. Således är den sökta arean $\frac{1}{2}$.
2. Vi betecknar det största talet som delar $N = (n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ för alla heltal *n* med $m$. Vi ser att *m* inte kan vara delbart med 2 eftersom då *n* är ett jämnt tal är *N* udda, då *n*=2. Vi ska nu undersöka vilka udda tal som kan dela $m$. Eftersom vi har produkten av 5 tal med skillnaden två mellan två på varandra följande faktorer måste *N* vara delbart med 3 och 5. Detta ser man genom att testa de olika fallen för resten av *n* vid division med 3 respektive 5. Alltså måste $m \geq 3 \cdot 5 = 15$. Vi noterar vidare att *m* inte kan vara delbar med något primtal $p > 5$ ty om vi väljer $n = p + 1$ är *N* inte delbart med *p*. Om *m* är delbart med 9 eller 25 väljer vi $n = 1 => N = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$, vilket varken är delbart med 9 eller 25. Alltså är $m \leq 3 \cdot 5 = 15$. Eftersom $15 \leq m \leq 15$ måste $m = 15$.
3. Vi börjar med att repetera delbarhetsregeln för 4. Ett tal är delbart med 4 om det tvåsiffriga tal som fås av de två sista siffrorna i talet är delbart med 4. Alltså måste $bc$ och $ba$ vara delbara med 4. För $b$ kan alla siffror väljas, dvs. 10 val. Om vi valde $b$ som ett udda tal (dvs. i 5 av fallen) så kan vi välja $a$ och $c$ till 2 eller 6, dvs. 2 val per bokstav. Om $b$ valdes som ett jämnt tal (dvs. i 5 av fallen) så kan vi välja $a$ och $c$ till 4 eller 8 (notera att 0 ej är tillåtet). Totalt finns $5 * 2 * 2 + 5 * 2 * 2 = 40$ olika möjligheter.
4. Denna uppgift kan givetvis lösas genom att addera alla produkterna och sedan subtrahera, men detta kan ta lång tid och risken för att göra fel är stor. Därför kan man genom subtraktionen få $20 * 21 - 21 + 18 * 19 - 19 * 20 + \cdots + 2 * 3 - 3 * 4 + 1 - 1 * 2$. Nu bryter vi ut den udda siffran i varje par av tal och får: $21(20-1) + 19(18-20) + \cdots + 3(2-4) + 1(1-2) = 21 * 19 - 2 * 19 - 2 * 17 - \cdots - 2 * 3 - 1 = 399 - 2 * (19 + 17 + \cdots + 3 + 1) + 1 = 400 - 2 * 20 * 5 = 200$. I det näst sista steget har vi använt att $19 + 1 = 17 + 3 = \cdots = 11 + 9 = 20$. Svaret är alltså 200.
5. Vi betecknar de tomma rutorna med bokstäverna *a, b, c, d, e, f*. Eftersom summan i alla rader och kolumner är densamma är $a + 20 + 16 = a + 42 + b$ och alltså är $b = -6$. Nu vet vi att summan i varje rad, kolumn och diagonal är $36 + a$. Alltså är $c = 26 + a$ eftersom $b + c + 16 = c + 10 = 36 + a$. Vidare blir nu $e = -32$ och $f = a + 52$. Nu vet vi att $a + c + f = a + 26 + a + 52 + a = a + 36$, och alltså är $a = -21$. Då får vi lösningen $a = -21, b = -6, c = 5, d = -10, e = -32, f = 31$.

| | | |
|---|---|---|
| a | 20 | 16 |
| 42 | c | e |
| b | d | f |

6. Låt skärningspunkten mellan *EF* och *HI* betecknas med *S* och låt mittpunkten på *AB* vara N. Enligt Pythagoras sats blir $EM = AM = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = a\sqrt{\frac{5}{4}}$. Vi noterar att vinkeln EMS=vinkeln AMN= 90 −vinkeln AMD=vinkeln DAM. Alltså är $\Delta ADM$ och $\Delta MES$ likformiga. Vi får nu att $\frac{ES}{ME} = \frac{DM}{AD}$ och alltså är $ES = ME * \frac{DM}{AD} = a\sqrt{\frac{5}{4}} * \frac{a/2}{a} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{4}}$. Alltså är arean av $\Delta MES = \frac{1}{2} * ME * ES = \frac{1}{2} * a\sqrt{\frac{5}{4}} * \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{5a^2}{16}$. Av symmetri få att areorna av $\Delta MES$ och $\Delta MHS$ lika och alltså är den sökta arean $\frac{5a^2}{8}$.

7. Den första bokstaven kan väljas på 5 sätt. På den andra platsen kan 4 bokstäver väljas, en får inte väljas på grund av den första. På samma sätt kan 4 bokstäver väljas på plats 3, 4 och 5. Alltså blir det totalt $5 * 4 * 4 * 4 * 4 = 1280$.

Del 2.

1. Vi ser att på den första platsen är det 1, 0 respektive 6. Denna fås alltså troligtvis genom att man tar bort 1 prick, men om man har 0 så börjar man om på 6 prickar. På den andra platsen minskar vi också med 1 prick. Alltså kommer nästa bricka att ha 5 prickar till vänster och 1 till höger. Man kan även se det som att för varje steg vi tar lägger vi till 3 prickar men om det blir fler än 6 prickar tar man bort 7 prickar, dvs. 0 blir 3, 1 blir 4, 2 blir 5, 3 blir 6, 4 blir 0, 5 blir 1 och 6 blir 2. Alltså ska det vara 5 prickar till vänster och 1 till höger.
2. Låt antalet år efter 1980 som planeterna passerar igen vara $t$. Vi vet då att för några *k, s* måste $t = 75k = 21s$. Alltså måste $25k = 7s$. För att detta ska ha en lösning så måste *s* vara delbart med 25 (eftersom 7 inte har någon gemensam faktor med 25) och *k* måste vara delbar med 7. Vi vill ha de minsta *k* och *s* och då ska vi alltså ha $s = 25, k = 7$, dvs. $t = 525$år. Nästa gång båda kometerna passerar samtidigt är alltså år 2505.
3. Vi börjar med att räkna ut hur många grader det är mellan 8an och timvisaren. På 60 minuter rör sig timvisaren $\frac{360°}{12} = 30°$. På 16 minuter rör den sig alltså $\frac{16}{60} * 30° = 8°$. Minutvisaren rör sig $\frac{360°}{60} = 6°$ per minut och den har 24 minuter till 8an, dvs. $6° * 24 = 144°$. Vinkeln mellan visarna är alltså $152°$.
4. Eftersom trianglarna är likformiga gäller att $vinklarna\ DCE$ och $ACB$ är lika stora. Från triangeln ABC får vi $vinkeln\ BAC + vinkeln\ ACB = 90°$. Alltså är $vinkeln\ ACE = 90°$. Enligt Pythagoras sats fås att $AE = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$.
5. Summan av vilka två av som helst av talen måste vara $\leq 31$ för att vara ett datum. Därmed kan inte två av primtalen vara större än 15. De enda tvåsiffriga primtalen mindre än 15 är 11 och 13. Det sista primtalet kan ej vara $\geq 19$ ty $19 + 13 > 31$. Därmed är det sista talet 17. Summan som fås då ej Catjas tal används var den största möjliga av två av de tre talen. Därmed har Catja det minsta talet vilket är 11.
6. Vi låter F vara CD:s andra skärning med cirkeln och O vara medelpunkten i cirkeln. Eftersom AB är diameter och CD är ortogonal mot AB är CD = CF. Eftersom $\frac{CD}{DF} = \frac{DO}{DE} = \frac{1}{2}$ och att vinklarna CDO och FDE är samma följer enligt sida-vinkel-sida att ΔFDE och ΔCDO är likformiga. Speciellt är EF höjd i ΔFDE. Därmed gäller att $EF = 2 * CO = 2 * \left(\frac{AB}{2} - AC\right) = AB - 2 * AC$. Eftersom $AC = \frac{AB}{4}$ är alltså $EF = \frac{AB}{2}$. Förhållandet mellan areorna blir alltså $1: 2$ eftersom arean av $CDE = \frac{CD*EF}{2} = \frac{CD*AB}{4}$ och arean av $ABD = \frac{AB*CD}{2}$.
7. Det går 50s mellan att Lars börjar springa 2 på varandra följande gånger (han springer 200m på 20s och vilar sedan 30s). På den tiden springer han 200m medan Malte springer 250m. Efter en cykel (löpning +vila) för Lars är de på samma ställe, efter två cykler är Malte 50m längre fram, därefter 100, 150, 200, etc. längre fram. För att Lars ska hinna ikapp Malte får han högst vara 100 meter längre fram än Lars när Lars börjar springa, ty Lars tar in 5m/s men springer bara i 20s, dvs. han tar in 100m. Under den första cykeln träffas de en gång, under den andra träffas de också en gång. Under den tredje däremot träffas de två gånger, en när Lars springer förbi Malte och en när Malte springer förbi Lars. Slutligen träffas de en gång under den tredje cykeln, då Lars kommer ikapp Malte innan Malte för evigt försvinner. Totalt träffas de alltså 5 gånger.

Del 3.

1. Vi noterar att $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Vi lägger ihop alla ekvationerna och får $a + \lfloor a \rfloor + \{a\} + b + \lfloor b \rfloor + \{b\} + c + \lfloor c \rfloor + \{c\} = 14{,}52$. Alltså är $2a + 2b + 2c = 14{,}52$, dvs. det sökta är $a + b + c = 7{,}26$.

Svar:

Del 1:

1. $\frac{1}{2}$
2. 15
3. 40
4. 200
5.

| | | |
|---|---|---|
| -21 | 20 | 16 |
| 42 | 5 | -32 |
| -6 | -10 | 31 |

6. $\frac{5a^2}{8}$
7. 1280

Del 2:

1. 5 prickar till vänster, 1 till höger.
2. År 2505
3. $152°$
4. 25
5. 11
6. 1:2
7. 5 gånger

Del 3:

1. $7{,}26$